Osnovna šola dr. Jožeta Pučnika Črešnjevec

POTENCIRANJE DVOČLENIKA

področje: MATEMATIKA

raziskovalna naloga

Avtor: Primož Pliberšek

Mentor: Žarko Šalabalija

Črešnjevec, 2016

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju Žarku Šalabaliji za usmerjanje in pomoč pri izdelavi moje raziskovalne naloge. Zahvaljujem se tudi Nini Krajnčič za jezikovni pregled naloge.

KAZALO

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem predstavil, kako potenciramo dvočlenik. Z matematičnimi preiskavami, brez uporabe zahtevnih orodij sem preiskoval različne matematične lastnosti, zakonitosti, odnose, vzorce, v katerih sem ugotovil pravilo za potenciranje dvočlenika. Pokazal in dokazal sem, da lahko samo z osnovnošolskim znanjem pridemo do pravila za potenciranje dvočlenika.

Učitelj mi je nato predstavil, kako potencirajo dvočlenik v srednji šoli oziroma na fakulteti. Raziskal sem njihov način potenciranja in ugotovil, da tudi kasneje potencirajo po podobnem pravilu, kot je moje, a pridejo do obrazca za potenciranje dvočlenika po povsem drugačni poti, ki vsebuje znanja, ki jih v osnovni šoli še ne spoznamo.

Za zaključek pa me je čakalo največje presenečenje - Pascalov trikotnik, ki me je najbolj navdušil. Na prvi pogled zelo preprost, v sebi pa skriva veliko čudovitih lastnosti različnih zaporedij števil. Osredotočil sem se le na tiste vzorce in zaporedja števil, ki so povezana s potenciranjem dvočlenika.

Ključne besede: potenciranje dvočlenika (binoma), Pascalov trikotnik

ABSTRACT

In this research paper I will describe the process known as binomial theorem (binomial expansion). I have conducted mathematical research and looked in to various mathematical properties, relationships and patterns. As a result of this process, I have found a rule for binomial expansion.

My mentor has showed how the process of binomial expansion is done in high schools and universities. I have compared this process to mine. The results have showed that a similar rule for binomial expansion is used, however the process of getting to the rule is very different as theirs is based on information and knowledge that is not yet accessible to students in primary schools.

The last and personally the most fascinating part of the research paper is Pascal's triangle. Pascal's triangle seems very simple, yet it conceals a huge number of patterns and special sequences of numbers. I have focused only on those patterns and sequences of numbers that are related to binomial expansion.

Key words: binomial theorem (binomial expansion), Pascal's triangle

UVOD

Na začetku 9. razreda smo se pri matematiki učili kvadrat dvočlenika in spoznali pravilo

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Ker sem želel stvar spoznati malo bolj podrobno, sem se lotil naslednjih izrazov.

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x+y)^5 = (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y) = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Učitelj je opazil, da me stvar res zanima, zato mi je postavil izziv.

Ali bi znal izračunati $(x+y)^6$ brez množenja $(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$?

Metodologija, ki sem jo v nalogi uporabil, so bile matematične preiskave, kjer sem na podlagi različnih vzorcev zaznal problemsko situacijo ter s pomočjo različnih procesnih znanj iskal poti in strategije reševanja. Vsako ugotovljeno pravilo sem skušal tudi dokazati. Za dokaz sem velikokrat uporabil matematično indukcijo.

Popolno indukcijo uporabljamo za dokazovanje veljavnosti nekega obrazca, trditve, enačbe, izjave, lastnosti ... v množici naravnih števil. Dokazovanje s popolno indukcijo temelji na dveh korakih:

1. Najprej postavimo trditev in jo dokažemo za prvo naravno število, število 1. Povsem pričakovano je, da če trditev drži za celotno množico naravnih števil, potem zagotovo drži tudi za naravno število 1. Če trditev ne velja, potem je trditev napačna. Če pa trditev velja, nadaljujemo na drugi korak.

2. Z drugim korakom želimo dokazati, da dana trditev velja še za vse ostale primere. To storimo tako, da:

- najprej predpostavimo, da trditev velja za naravno število n,

- nato pa s predpostavko, da velja za n, dokažemo, da velja tudi za n+1.

Če ob predpostavki, da trditev velja za naravno število n, dokažemo, da velja tudi za n+1, smo trditev s pomočjo popolne indukcije dokazali.

Nastalo je to raziskovanje.

1 POISKAL SEM PRAVILO ZA POTENCIRANJE DVOČLENIKA

Ker že poznam

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

poiščem pravila, ki se pojavljajo v vzorcih.

1.1 Število členov

Pri kvadratu dvočlenika dobimo tri člene, pri kubu dvočlenika štiri člene, zato bo imel $(x + y)^6$ sedem členov.

Trditev 1.1

$(x + y)^n$ ima n+1 členov.

Dokaz: sledi na koncu trditve 1.3.

1.2 Stopnje členov

Pri $(x + y)^6$ bo prvi člen x^6 in zadnji y^6. Tudi stopnje ostalih členov so bile takoj vidne, saj bo drugi člen x^5y, tretji člen bo x^4y^2, četrti x^3y^3, peti x^2y^4 in predzadnji xy^5. Stopnje prvega člena v vsoti padajo za 1 in stopnje drugega člena v vsoti naraščajo za 1.

Trditev 1.2

$$(x + y)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + a_3x^{n-3}y^3 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$$

Dokaz: sledi na koncu trditve 1.3.

1.3 Koeficienti členov

S koeficienti členov pa je malo več težav.

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

Ugotovim, da sta enaka prvi in zadnji koeficient, drugi in predzadnji itd. Prvi in zadnji koeficient sta vedno 1, drugi in predzadnji koeficient sta enaka stopnji, za ostale koeficiente pa se je potrebno malo bolj potruditi.

Pomagam si tako, da si za x in y izberem število 1. Ker so potence števila 1 enake 1, lahko zelo hitro dobim koeficiente za posamezno potenco – vsota koeficientov je enaka potenci števila 2.

Naj bo zato a koeficient prvega in zadnjega člena, b koeficient drugega in predzadnjega člena, c koeficient tretjega itd. Potem velja:

$(1+1)^2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot 1^2 = 2^2 = 4$

$2a + b = 4, a = 1, b = 2$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(1+1)^3 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 \cdot 1 + b \cdot 1 \cdot 1^2 + a \cdot 1^3 = 2^3 = 8$

$2a + 2b = 8, a = 1, b = 3$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(1+1)^4 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 \cdot 1 + c \cdot 1^2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 \cdot 1^3 + a \cdot 1^4 = 2^4 = 16$

$2a + 2b + c = 16, \text{če je } a = 1, b = 4 \;\; \rightarrow \;\; c = 6$

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

$(1+1)^5 = a \cdot 1^5 + b \cdot 1^4 \cdot 1 + c \cdot 1^3 \cdot 1^2 + c \cdot 1^2 \cdot 1^3 + b \cdot 1 \cdot 1^4 + a \cdot 1^5 = 2^5 = 32$

$2a + 2b + 2c = 32, \text{če je } a = 1, b = 5 \;\; \rightarrow \;\; c = 10$

$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

$(1+1)^6 = a \cdot 1^6 + b \cdot 1^5 \cdot 1 + c \cdot 1^4 \cdot 1^2 + d \cdot 1^3 \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 \cdot 1^4 + b \cdot 1 \cdot 1^5 + a \cdot 1^6 = 2^6 = 64$

$2a + 2b + 2c + d = 64, \text{če je } a = 1, b = 6 \;\; \rightarrow \;\; 2c + d = 50$

$c = ?, d = ?$

Tu pa vsota koeficientov ni več dovolj.

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

Ugotovim, da je tretji koeficient pri dvočleniku s stopnjo 2 dvakrat manjši od drugega koeficienta, pri stopnji 3 sta drugi in tretji koeficient enaka, pri stopnji 4 je tretji koeficient $1\frac{1}{2}$ krat večji … Torej velja:

če je $n = 2 \rightarrow c = \frac{b}{2}$, če je $n = 3 \rightarrow c = \frac{2b}{2}$, če je $n = 4 \rightarrow c = \frac{3b}{2}$,

če je $n = 5 \rightarrow c = \frac{4b}{2}$, če je $n = 6 \rightarrow c = \frac{5b}{2}$ …

Pravilo, kako izračunam tretji koeficient za poljubni n: $c = \frac{n-1}{2} \cdot b$

Iz tega sledi $c = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$ in $d = 20$

Brez računanja lahko rešim izziv, ki mi ga je postavil učitelj, in sicer:

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

Seveda se sedaj vprašam, ali lahko ugotovim pravilo tudi za $(x+y)^7, (x+y)^8$ …

Pri $(x+y)^7$ lahko srednja dva koeficienta, ker sta enaka, izračunam s pomočjo vsote koeficientov, a pri $(x+y)^8$ moram poiskati četrti koeficient.

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

če je $n = 3 \rightarrow d = \frac{c}{3}$, če je $n = 4 \rightarrow d = \frac{2c}{3}$, če je $n = 5 \rightarrow d = \frac{3c}{3}$,

če je $n = 6 \rightarrow d = \frac{4c}{3}$, če je $n = 7 \rightarrow d = \frac{5c}{3}$, …

Pravilo, kako izračunam četrti koeficient za poljubni n: $d = \frac{n-2}{3} \cdot c$

Torej velja:

$(x+y)^8 = ax^8 + bx^7y + cx^6y^2 + dx^5y^3 + ex^4y^4 + dx^3y^5 + cx^2y^6 + bxy^7 + ay^8$

$a = 1, b = 8, c = 28 \rightarrow d = 56, e = 70$

$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$

Peti koeficient je potem:

če je $n = 4 \rightarrow e = \frac{c}{4}$, če je $n = 5 \rightarrow e = \frac{2d}{4}$, če je $n = 6 \rightarrow e = \frac{3d}{4}$,

če je $n = 7 \rightarrow e = \frac{4d}{4}$, če je $n = 8 \rightarrow e = \frac{5d}{4}, \ldots$

Pravilo, kako izračunam peti koeficient za poljubni n: $e = \frac{n-3}{4} \cdot d$

Šesti koeficient: $f = \frac{n-4}{5} \cdot e$

Poljubni koeficient: $\frac{n-(r-2)}{r-1} \cdot$ prejšnji koeficient, za r-ti koeficient.

Trditev 1.3

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}xy^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}y^n$$

Dokaz: Dokaz s popolno indukcijo

Za $n = 1$ dobimo $(x+1)^1 = x^1 + 1\cdot x^0 y = x + y$ in trditev velja.

Za $n = 1$ dobimo samo 2 člena, ker vsi ostali členi vsebujejo v produktu faktor $(n-1)$, ki je za $n = 1$ enak 0 ali pa ne obstaja, tako da trditev velja.

Naj velja

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-3}y^3 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

potem dokažimo, da velja

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \frac{(n+1)\cdot n}{2}x^{n-1}y^2 + \frac{(n-1)}{3}\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + (n+1)xy^n + y^{n+1}$$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) =$$

$$= (x^n + nx^{n-1}y + \frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + nxy^{n-1} + y^n)\cdot(x+y) =$$

$$= \left(x^n + nx^{n-1}y + \frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-3}y^3 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n\right)\cdot x +$$

$$\left(x^n + nx^{n-1}y + \frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}x^{n-3}y^3 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n\right)\cdot y =$$

$$= \left(x^{n+1} + nx^n y + \frac{(n-1)\cdot n}{2} x^{n-1}y^2 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} x^{n-2}y^3 + \cdots + nx^2y^{n-1} + xy^n \right) +$$

$$\left(x^n y + nx^{n-1}y^2 + \frac{(n-1)\cdot n}{2} x^{n-2}y^3 + \frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} x^{n-3}y^4 + \cdots + nxy^n + y^{n+1} \right) =$$

$$= \ x^{n+1} + (n+1)x^n\, y + \frac{n\cdot(n+1)}{2} x^{n-1}y^2 + \frac{(n-1)}{3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} x^{n-2}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + (n+1)xy^n + y^{n+1} = \ (x+y)^{n+1}$$

Dobimo n členov, ki vsebuje faktorja x in y ter enega s samim x in enega s samim y, skupaj n+2 členov. Trditev velja.

$\square$

2 BINOMSKI IZREK

To je izrek, ki govori o potenciranju binoma (dvočlenika). Najprej sem se seznanil z računanjem fakultet in binomskim simbolom.

Fakulteta naravnega števila je funkcija, ki določa produkt naravnih števil, manjših ali enakih od danega števila, binomski simbol pa izračunamo po spodnjem pravilu.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Spoznal sem binomski izrek.

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

ali krajše

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

V naslednjih vrsticah sem poenostavil binomske simbole

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{\big(n-(n-1)\big)! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

Binomski izrek lahko zato zapišem tudi na ta način

$$(x + y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n \cdot (n-1)}{2} x^{n-2} y^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} x^{n-3} y^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} x y^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} y^n$$

Čeprav sem svoje trditve že dokazal, sem dobil še eno potrditev, da je moje pravilo potenciranja dvočlenika pravilno, saj ima binomski izrek enake člene kot pravilo, ki sem ga poiskal na podlagi vzorcev s pomočjo matematične preiskave (Trditev 1.3).

Dejstvo pa je, da za uporabo binomskega izreka potrebujemo srednješolsko znanje ($\mathrm{n}! = \mathrm{n} \cdot (\mathrm{n}-1) \cdot (\mathrm{n}-2) \cdot (\mathrm{n}-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ in $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})! \cdot \mathrm{r}!}$), saj je binomski izrek vedno zapisan v obliki z binomskimi simboli. Zato sem vesel, da sem splošno pravilo poiskal s preprostimi matematičnimi orodji in na podlagi osnovnošolskega znanja.

3 PASCALOV TRIKOTNIK

Shema števil, ki jih zapišemo v trikotno obliko, se imenuje Pascalov trikotnik. Spoznal sem, da Pascalov trikotnik ponuja še enostavnejšo obravnavo binomskih koeficientov, saj nam števila v vrsticah Pascalovega trikotnika predstavljajo koeficiente členov pri potenciranju dvočlenika (Slika 1). Zgodovinarji domnevajo, da so to shemo poznali že v stari kitajski in indijski civilizaciji. Prvi, ki jo je obravnaval in našel mnoge njene lastnosti, je bil francoski matematik 17. stoletja Blaise Pascal, zato se ta trikotnik imenuje Pascalov trikotnik.

1	$(x + y)^0 = 1$
1 1	$(x + y)^1 = x + y$
1 2 1	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y$
1 3 3 1	$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
1 4 6 4 1	$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
1 5 10 10 5 1	$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^2 + 5xy^4 + y^5$
1 6 15 20 15 6 1	$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + x$
1 7 21 35 35 21 7 1	$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

Slika 1: Pascalov trikotnik (lastni vir)

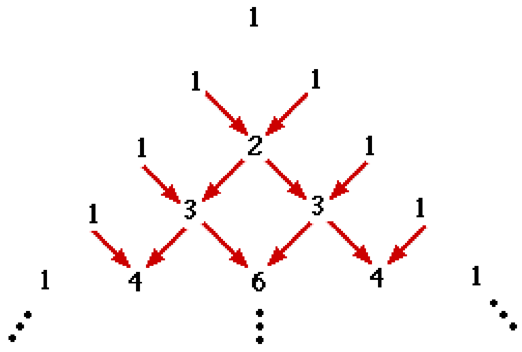
3.1 Vrstice in diagonale v Pascalovem trikotniku

Zanimalo me je predvsem to, kako še lahko poiščem binomske koeficiente s pomočjo Pascalovega trikotnika.

1. način

Če seštejem 1. in 2. element v vrstici, dobim 2. element v naslednji vrstici, če seštejem 2. in 3. element v vrstici, dobim 3. element v naslednji vrstici, če seštejem 3. in 4. element v vrstici, dobim 4. element v naslednji vrstici …

Na splošno lahko zapišem. Če seštejemo n. in (n+1). element v vrstici, dobimo (n+1). element v naslednji vrstici (slika 2).



Slika 2: Iskanje binomskih koeficientov s pomočjo prejšnje vrstice (lastni vir)

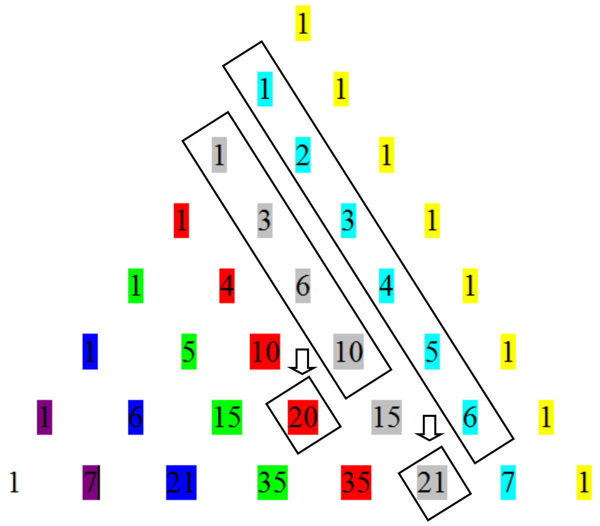
2. način

Če seštejemo n elementov prejšnje diagonale, dobimo n. element naslednje diagonale.

Primer:

Seštejemo prvih šest elementov druge diagonale 1+2+3+4+5+6=21 in dobimo šesti element tretje diagonale. Če seštejemo n elementov druge diagonale, dobimo n. element tretje diagonale (dokaz sledi na koncu trditve 3.1).

Seštejmo prve štiri elemente tretje diagonale 1+3+6+10=20 in dobimo četrti element četrte diagonale. Če seštejemo n elementov tretje diagonale, dobimo n. element četrte diagonale (dokaz sledi na koncu trditve 3.3).



Slika 3: Iskanje binomskih koeficientov s pomočjo prejšnje diagonale (lastni vir)

V bistvu so števila v diagonalah koeficienti, ki sem jih iskal v poglavju 1.

Prva diagonala nam predstavlja prve koeficiente (a), druga diagonala druge koeficiente (b), tretja diagonala tretje koeficiente (c) …

Za vsak koeficient sem že v prvem poglavju poiskal pravilo, kako ga izračunam.

Tabela 1: Koeficienti, zapisani iz diagonal

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	n
1. koeficient	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2. koeficient	0	1	2	3	4	5	6	7	8	n
3. koeficient	0	0	1	3	6	10	15	21	28	$\frac{(n-1)\cdot n}{2}$
4. koeficient	0	0	0	1	4	10	20	35	56	$\frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3\cdot 2}$

Kot vidimo, je algoritem iskanja binomskih koeficientov v Pascalovem trikotniku zelo preprost. A obstaja dvom, da ta način ni najbolj uporaben. Če želiš na primer poiskati koeficiente $(x+y)^{20}$, potrebuješ prejšnje vrstice oziroma diagonale, da ugotoviš koeficiente za to potenco, kar enostavnost in uporabnost Pascalovega trikotnika nekoliko razvrednoti.

Pascalov trikotnik »skriva« veliko različnih vzorcev in zaporedij. Osredotočil sem se na tiste, ki so povezani s potenciranjem dvočlenika.

Števila v 3. diagonali 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, … imenujemo **trikotniška števila** in števila v 4. diagonali 1, 4, 10, 20, 35, 56, … **tetraedrska števila**.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Slika 4: Trikotniška in tetraedrska števila (lastni vir)

3.1.1 Trikotniška števila

Trikotniška števila se nahajajo v tretji diagonali Pascalovega trikotnika.

To so 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 …

Dobimo jih s seštevanjem zaporednih naravnih števil, 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, …

Trditev 3.1

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (\mathrm{n}-1) = \frac{\mathrm{n} \cdot (\mathrm{n}-1)}{2}, \text{ če je } \mathrm{n} \geq 2, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

Dokaz 1:

Z x označimo poljubno trikotniško število. Potem lahko zapišemo trikotniško število na dva načina.

$$\mathrm{x} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (\mathrm{n}-2) + (\mathrm{n}-1), \quad \mathrm{x} = (\mathrm{n}-1) + (\mathrm{n}-2) + (\mathrm{n}-3) + \cdots + 2 + 1$$

Seštejemo enačbi in dobimo.

$$2\mathrm{x} = \mathrm{n} + \mathrm{n} + \mathrm{n} + \cdots + \mathrm{n} + \mathrm{n} = (\mathrm{n}-1) \cdot \mathrm{n}$$

$$\mathrm{x} = \frac{(\mathrm{n}-1) \cdot \mathrm{n}}{2}, \text{če je } \mathrm{n} \geq 2, \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$\square$

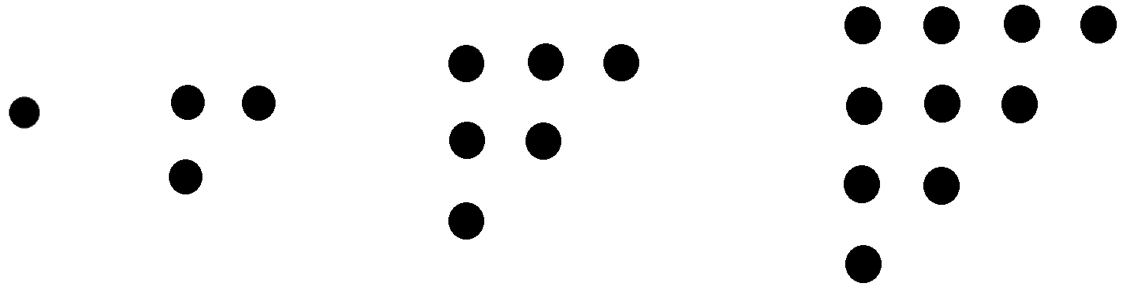
Pri tem dokazovanju pridemo do zanimive ugotovitve, kako lahko zelo enostavno poiščemo večja trikotniška števila. Iz zapisa $2\mathrm{x} = (\mathrm{n}-1) \cdot \mathrm{n}$ lahko povzamemo, da je produkt dveh zaporednih naravnih števil enak dvakratniku trikotniškega števila.

Primer: $15 \cdot 16 = 240 \ \rightarrow 240 : 2 = 120$ (120 je trikotniško število)

Dokaz 2: grafično dokazovanje

Trikotniška števila lahko prikažemo tudi grafično (v mojem primeru z enakokrakim pravokotnim trikotnikom).

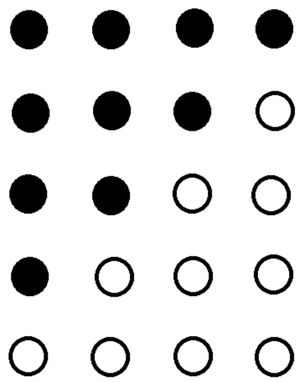
n=2 n=3 n=4 n=5



1 $1+2=3$ $1+2+3=6$ $1+2+3+4=10$

$\mathrm{n}-1$

n



Poljubnemu trikotniškemu številu črnih pik dodamo enako trikotniško število belih pik. Dobimo pravokotnik z $(\mathrm{n}-1)\cdot\mathrm{n}$ pikami. Samo črnih oziroma samo belih je $\frac{(\mathrm{n}-1)\cdot\mathrm{n}}{2}$ pik.

Poljubno trikotniško število je $\frac{(\mathrm{n}-1)\cdot\mathrm{n}}{2}$. $\square$

Pri preiskovanju trikotniških števil sem ugotovil tudi veliko zanimivih lastnosti. Ena je predstavljena in dokazana v naslednji trditvi.

$1+3=4, 3+6=9, 6+10=16, 10+15=25 \ldots$

Trditev 3.2

Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je popolni kvadrat.

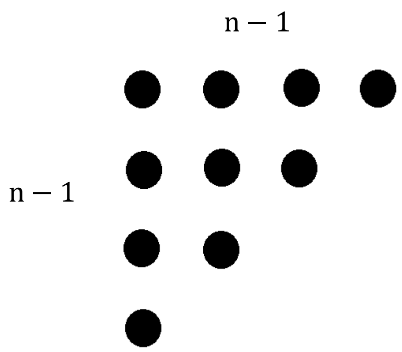
Dokaz 1:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{n \cdot (n-1+n+1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

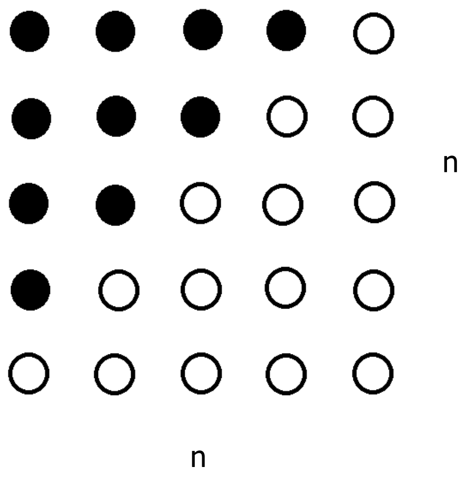
□

Dokaz 2: grafično dokazovanje

V poljubnem trikotniškem številu je $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ pik.



Če poljubnemu trikotniškemu številu pik dodamo naslednje zaporedno trikotniško število pik, dobimo kvadrat z n^2 pikami.



□

3.1.2 Tetraedrska števila

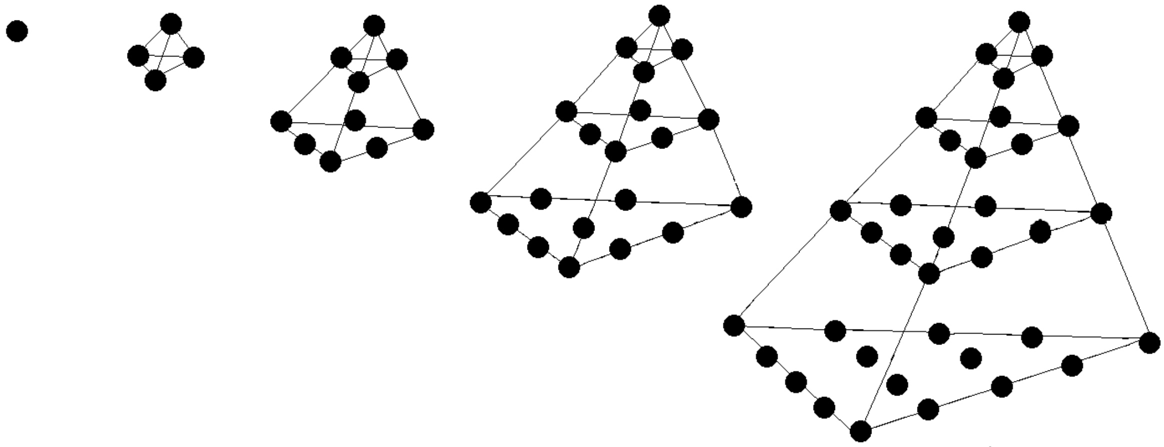
Tetraedrska števila se nahajajo v četrti diagonali Pascalovega trikotnika.
Dobimo jih s seštevanjem zaporednih trikotniških števil $1, 1+3=4, 1+3+6=10$, $1+3+6+10=20, 1+3+6+10+15=35, \ldots$

Trditev 3.3

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n \cdot (n-1)}{2}=\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}, \text{ če je } n>2, n \in N$$

Dokaz: grafično dokazovanje

1 1+3=4 1+3+6=10 1+3+6+10=20 1+3+6+10+15=35



$\square$

3.2 POTENCE ŠTEVILA 2

Že na začetku raziskovanja sem ugotovil, da je vsota binomskih koeficientov enaka potenci števila 2. Sedaj bom to tudi dokazal.

Tabela 2: Potence števila 2

1	$2^0 = 1$
1 + 1	$2^1 = 2$
1 + 2 + 1	$2^2 = 4$
1 + 3 + 3 + 1	$2^3 = 8$
1 + 4 + 6 + 4 + 1	$2^4 = 16$
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	$2^5 = 32$
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	$2^6 = 64$
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1	$2^7 = 128$

Trditev 3.4

Za vsako vrstico v Pascalovem trikotniku velja:

$$1 + n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = 2^n$$

Dokaz:

Če je $x = y = 1$, sledi:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n \cdot (n-1)}{2} x^{n-2}y^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} x^{n-3}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} xy^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} y^n$$

$$(1+1)^n = 1 \cdot 1^n + n \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 1^{n-3} \cdot 1^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1^n$$

$$2^n = 1 + n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$\square$

3.3 POTENCE ŠTEVILA 11

n = 0	1	$11^0 = 1$
n = 1	1 1	$11^1 = 11$
n = 2	1 2 1	$11^2 = 121$
n = 3	1 3 3 1	$11^3 = 1331$
n = 4	1 4 6 4 1	$11^4 = 14641$
n = 5	1 5 10 10 5 1	$11^5 = 161051$
n = 6	1 6 15 20 15 6 1	$11^6 = 1771561$
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1	$11^7 = 19487171$
n = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$11^8 = 214258881$
n = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$11^9 = 2357947691$

Slika 5: Potence števila 11 (lastni vir)

V Pascalovem trikotniku nam vrstice predstavljajo potence števila 11. Za n ≤ 4 je to vidno takoj, a vrstica n = 5 je prva vrstica z večmestnimi števili. Toda tudi 11^5 je skrito v Pascalovem trikotniku (slika 5).

	1	5	10	10	5	1	
n = 5	1	5_1	0_1	0	5	1	$11^5 = 161051$
	1	6	1	0	5	1	

Slika 6: 11^5=161051 (lastni vir)

$$11^5 = (10+1)^5 = 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4\cdot 1 + 10\cdot 10^3\cdot 1^2 + 10\cdot 10^2\cdot 1^3 + 5\cdot 10\cdot 1^4 + 1\cdot 1^5$$

$$11^5 = 1\cdot 1 + 5\cdot 10 + 0\cdot 10^2 + 1\cdot 10^3 + 6\cdot 10^4 + 1\cdot 10^5 = 161051$$

Pri 11^9 je še malo bolj zapleteno, ker imamo trimestne koeficiente.

$$11^9 = (10+1)^9 = 1\cdot 10^9 + 9\cdot 10^8\cdot 1 + 36\cdot 10^7\cdot 1^2 + 84\cdot 10^6\cdot 1^3 + 126\cdot 10^5\cdot 1^4 +$$
$$126\cdot 10^4\cdot 1^5 + 84\cdot 10^3\cdot 1^6 + 36\cdot 10^2\cdot 1^7 + 9\cdot 10^1\cdot 1^8 + 1\cdot 1^9 =$$
$$= 1 + 9\cdot 10 + 6\cdot 10^2 + 7\cdot 10^3 + 4\cdot 10^4 + 9\cdot 10^5 + 7\cdot 10^6 + 5\cdot 10^7 + 3\cdot 10^8 + 2\cdot 10^9 =$$
$$= 2357947691$$

Trditev 3.5

$$11^n = (10+1)^n = 10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + 10 \cdot 10 + 1$$

Dokaz: Dokaz s popolno indukcijo

Za $n = 1$ velja $11^1 = (10+1)^1 = 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 11$

Naj velja $11^n = (10+1)^n =$

$$= 10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \frac{n \cdot (n-\ 1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{n-3} + \cdots + 10 \cdot 10 + 1$$

Dokažimo, da velja $11^{n+1} = (10+1)^{n+1} =$

$$= 10^{n+1} + (n+1) \cdot 10n + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot 10^{n-1} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{6} \cdot 10^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + 10 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 =$$
$$= 10^{n+1} + n \cdot 10^n + 1 \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{n-2}$$
$$+ \frac{(n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + 1 \cdot 10^1 + 1 =$$
$$= 10^{n+1} + \left(n \cdot 10^n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{n-2} + \cdots + 1 \cdot 10^1\right) +$$
$$\left(1 \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{(n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + 1\right) =$$
$$= 10\left(10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{n-3} + \cdots + 1\right) +$$
$$\left(1 \cdot 10^n + n \cdot 10^{n-1} + \frac{(n-1)}{2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + 1\right) =$$
$$= 10 \cdot 11^n + 11^n = 11^n \cdot (10+1) = 11^{n+1}$$

$\square$

3.4 POTENCE ŠTEVILA 10^x+1

Trditev 3.6

Vsako potenco števil 2, 11, 101, 1001, 10001 itd. lahko zapišemo kot potenco števila $(10^x + 1)^n$, kjer sta x in n celi nenegativni števili. Potenca vsebuje xn+1 števk.

Dokaz:

$$(10^x + 1)^n = 10^{xn} + n \cdot 10^{xn-x} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{xn-2x} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{xn-3x} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^2 + n \cdot 10^1 + 1$$

$$(10^x + 1)^{n+1} = (10^x + 1)^n \cdot (10^x + 1) =$$

$$= (10^{xn+x} + n \cdot 10^{xn} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{xn-x} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{xn-2x} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{2x} + n \cdot 10^x + 10^x) + (10^{xn} + n \cdot 10^{xn-x} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 10^{xn-2x} +$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot 10^{xn-3x} + \cdots + n \cdot 10^{2x} + 10 + 1) =$$

$$= 10^{xn+x} + (n+1) \cdot 10^{xn} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot 10^{xn-x} + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{6} \cdot 10^{xn-2x} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot 10^{2x} + (n+1) \cdot 10^x + 1 = (10^x + 1)^{n+1}$$

$\square$

Ugotovil sem, če je $n \leq 4$, je to število palindrom.

če je $n = 1$, velja $10^x + 10^0$

če je $n = 2$, velja $10^{2x} + 2 \cdot 10^x + 10^0$

če je $n = 3$, velja $10^{3x} + 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x + 1 \cdot 10^0$

če je $n = 4$, velja $10^{4x} + 4 \cdot 10^{3x} + 6 \cdot 10^{2x} + 4 \cdot 10^x + 1 \cdot 10^0$

če je $n = 5$, velja $= 10^{5x} + 5 \cdot 10^{4x} + 10 \cdot 10^{3x} + 10 \cdot 10^{2x} + 5 \cdot 10^x + 1 = 10^{5x} + 5 \cdot 10^{4x} +$

$+10^{3x+1} + 10^{2x+1} + 5 \cdot 10^x + 1.$

Kot lahko vidimo, se pri eksponentih, manjših ali enakih 4, število ničel zmanjšuje vedno za x, zato je število palindrom. Pri eksponentu 5 pa se število ničel včasih zmanjša za x, x-1 ali x+1, zato število ni več palindrom.

Sedaj lahko na pamet potenciram npr. 1001^4.

Potenca ima 13 števk. Ker je eksponent 4, vsebuje števke 1, 4, 6, 4, 1 ter ničle. Ker je palindrom, je potenca 1001^4 = 1004006004001

4 ZAKLJUČEK

Verjamem, da je v matematiki odkrito skoraj vse in da učenec, ki je star 14 let, težko odkrije kaj novega. Vem pa tudi, da je občutek, ko sam poiščem določeno pravilo, pa čeprav je to pravilo odkrito že »neštetokrat«, fantastičen. Še bolje pa se počutim, če lahko to pravilo tudi sam potrdim z dokazi.

Ker vem, da se veliko raziskovalnih nalog dela z uporabo in raziskovanjem pisnih virov oziroma statističnem raziskovanju določene hipoteze (anketni vprašalniki), me je veselilo, da mi je učitelj postavil samo izziv in ni predpisal določene literature, ki jo naj raziskujem. Zaradi mojih specifičnih težav si z branjem včasih namreč nisem na »ti«. Literaturo sem uporabil samo pri Pascalovem trikotniku. Delo je zato temeljilo predvsem na reševanju problemov in opazovanju vzorcev, v katerih sem našel določena smiselna pravila, zato me teorija (npr. kdo je bil Pascal) ni zanimala.

Tako je nastalo »moje« pravilo iskanja binomskih koeficientov $\left(\mathrm{b} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{a},\ \mathrm{c} = \frac{\mathrm{n}-1}{2} \cdot \mathrm{b},\ \mathrm{d} = \frac{\mathrm{n}-2}{3} \cdot \mathrm{c},\ \mathrm{e} = \frac{\mathrm{n}-3}{4} \cdot \mathrm{d},\ \mathrm{f} = \frac{\mathrm{n}-4}{5} \cdot \mathrm{e}, \dots\right)$, ki je rdeča nit moje raziskovalne naloge. Spoznal sem, da so nekateri koeficienti posebni (trikotniška in tetraedrska števila) in skrivajo veliko zanimivih lastnosti. Fasciniral me je po eni strani preprost in po drugi strani »bogat« Pascalov trikotnik, ki ponuja res veliko. V njem sem se osredotočil samo na vzorce, ki so povezani s koeficienti v razvoju potenc binoma, ostale zanimivosti pa bom prihranil za katero drugo raziskovanje.

Na koncu sem se vprašal tudi o uporabnosti svojih spoznanj. S svojimi pravili lahko zelo enostavno potenciram vsak dvočlenik, še več, na pamet znam potencirati npr. število 1000001^3. Veseli me, da sem vse ugotovitve uspel dokazati tako, da jih lahko mirno uporabljam v naslednjih raziskovanjih.

5 VIRI IN LITERATURA

Binomski izrek in Pascalov trikotnik. [elektronski vir]. Dostopno na svetovnem spletu.

http://astra.si/binomski-izrek-in-pascalov-trikotnik/ (11. 11. 2015)

Forstnerič, F. (1980/1981). *Pascalov trikotnik*. Presek, letnik 8, številka 4, str. 200-205.

Pascal's Triangle. [elektronski vir]. Dostopno na svetovnem spletu.

http://www.mathsisfun.com/pascals-triangle.html (20. 11. 2015)

Rovtar, M. (2015). *Matematična preiskovanja zanimivih naravnih števil.* Diplomsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.