Gimnazija Ptuj

SFERIČNA TRIGONOMETRIJA

(Matematika;

raziskovalna naloga)

Avtor: Jaka Bezjak
Mentorica: mag. Simona Kokol

Ptuj, 2016

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

1. Zahvala

Rad bi se zahvalil mentorici za idejo, spodbudo in pomoč pri raziskovalni nalogi. Brez njenih razlag in napotkov te naloge ne bi bilo. Zahvala gre tudi Knjižnici Ivana Potrča Ptuj za veliko izbiro in hitro dobavo kakovostne literature.

2. Povzetek

Na postavljeno vprašanje »Ali obstaja trikotnik, ki ima vse tri kote prave kote?« sem odgovoril tako, da sem preučil vejo matematike, sferično geometrijo, ki spada k neevklidski geometriji. Ugotovil sem, da sferična geometrija ne temelji na enakih aksiomih kot vsem znana običajna evklidska geometrija, zato se od nje precej razlikuje. Svoje aksiome in definicije namreč gradi na krogli – sferi. Ko sem se najprej seznanil z osnovami sfere, sem lahko nadaljeval s spoznavanjem geometrije na njej.

Hitro sem spoznal nov lik, sferični dvokot, in na kratko preučil njegove lastnosti in posebnosti. Najbolj me je zanimalo, kaj se dogaja s trikotnikom na sferi. Preučil sem njegove lastnosti in posebnosti ter osnovne povezave med stranicami in koti (kotne funkcije). Tako sem se seznanil s pravokotnim sferičnim trikotnikom. Preučil sem še njegove posebnosti in si tako odgovoril na postavljeno raziskovalno vprašanje.

Pozanimal sem se tudi, kje se sferična trigonometrija uporablja danes in sem z novim znanjem rešil nekaj zanimivh primerov uporabe sferične trigonometrije.

3. Uvod

Brskanje po internetu lahko včasih privede do zanimivih odkritij. V mojem primeru sem na ta način našel kratek video, ki je prikazoval neobičajen trikotnik z vsemi tremi pravimi koti. Ob tem sem se začudil in se vprašal, ali je tak sploh mogoč. Najdeno sem pokazal mentorici, ki mi je pojasnila, da je to mogoče, vendar ne v nam običajni evklidski geometriji.

Začel sem raziskovati in odkrivati, katera geometrija omogoča tak trikotnik in se tako prvič srečal s sferično geometrijo, to je geometrijo na krogli, ki je pri rednem pouku ne spoznamo. Glede na to, da živimo na okroglem planetu, se mi je zdelo zanimivo in uporabno, da to geometrijo spoznam od blizu.

V nalogi sem spoznaval in odkrival posebnosti te drugačne geometrije, ki svoje aksiome in definicije gradi na krogli – sferi. Spoznal sem nove geometrijske zakonitosti, like in posebnosti sferične geometrije. Naredil sem primerjavo med evklidsko in sferično geometrijo.

Osrednji del naloge sem namenil trikotniku na sferi. Spoznal sem njegove zakonitosti in izreke in jih kasneje uporabil pri reševanju praktičnih nalog. Ugotovil sem, da je sferična geometrija uporabna v številnih primerih, predvsem v letalstvu, astronomiji, pomorstvu in geografiji.

4. Teoretične osnove

4.1 Osnovni pojmi in definicije

Vse definicije in vsi dokazi so povzeti po knjigi: *J. Beban-Brkić: Predavanja iz matematike 1, 2003*.

4.1.1 Neevklidska geometrija

Povzeto po članku: *J. J. O'Connor and E. F. Robertson: Non-Euclidean geometry, 1996.*

Neevklidska geometrija ne temelji na enakih aksiomih kot evklidska geometrija, ki jih je Evklid napisal v knjigi Elementi. Spremenjen je peti aksiom oz. Evklidov aksiom o vzporednicah, ki pravi »Skozi dano točko obstaja k dani premici ena in samo ena vzporednica.« Veliko matematikov skozi zgodovino je bilo prepričanih, da ta aksiom ni potreben in so to hoteli dokazati.

Zato poznamo več neevklidskih geometrij. Prvo in najbolj znano je leta 1826 odkril Lobachevksy; ta temelji na njegovem spremenjenem aksiomu o vzporednici, ki pravi: »Skozi točko T, ki ne leži na premici p, poteka več kot ena vzporednica k premici p.« Geometrijo s tem spremenjenim aksiomom poznamo pod imenom hiperbolična geometrija.

Prvo delo o sferični geometriji je napisal Avtolik v četrtem stoletju pred našim štetjem z naslovom »Peri kinoumenes sphairas.« Največ je o sferični geometriji napisal Leonhard Euler v zbirki Opera Omnia, ki je napisana v nemškem in latinskem jeziku.

4.1.2 Sfera

Temeljni pojem sferične geometrije je **sfera**.

Sfera je skupina vseh točk v prostoru, ki so od središča O oddaljene za polmer (radij) R ⇒ S(O,R).

Kadar je radij enak eni enoti ($R = 1$), to imenujemo **standardna sfera** S(O,1).

Če sfero prerežemo z ravnino, dobimo krožnico s polmerom r. Tako krožnico imenujemo **sekundarna krožnica**. Če pa prerežemo skozi središče sfere, dobimo **glavno ali veliko krožnico**, katere radij je enak radiju sfere ($R = r$). Krožnica je **orientirana**, kadar ji je določena smer.

Četrtina glavne krožnice se imenuje **kvadrant**.

Antipodalne točke glavne krožnice so njene diametralno nasprotne točke. Označujemo jih s C in C' ali C in –C. Skozi dve diametralno nasprotni točki leži neskončno mnogo glavnih krožnic. Za vsaki dve točki A in B na sferi, ki nista diametralno nasprotni, obstaja edinstvena glavna krožnica, na kateri ležita. Dobimo jo kot presek sfere in ravnine, določene s točkama A, B in središčem O.

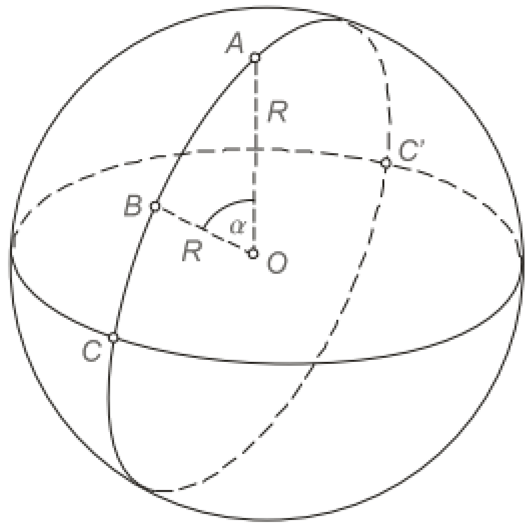
Osnovni gradnik je še vedno točka, premico iz evklidske geometrije pa nadomesti **krožni lok**, to je del glavne krožnice, ki je omejen z dvema točkama . Tudi **razdalja na sferi** je definirana drugače, in sicer kot razdalja krajšega loka AB glavne krožnice, ki gre skozi točki A in B (slika 1). Ta lok označujemo: $\boldsymbol{\sphericalangle AOB = \alpha}$.

Dolžina loka $\widehat{AB}$, izračunana:

- v radianih: $\left|\widehat{AB}\right| = R \times \alpha$,
- v stopinjah: $\left|\widehat{AB}\right| = R \times \alpha \times \frac{\pi}{180°}$.

Najkrajša razdalja med dvema točkama se imenuje **geodetska krivulja**.

Formulo za površino sfere je prvi odkril Arhimed pred dvatisočimi leti. Ugotovil je, da je površina sfere enaka površini stene cilindra, če je višina cilindra enaka premeru sfere. Dobimo formulo: $P_s = 4\pi R^2$.



Slika 1: Krožni lok na sferi (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

4.1.3 Geometrija na sferi

V sferični geometriji se pojavi lik, ki ga v ravninski evklidski geometriji ni. To je **sferični dvokot**. Ko se sekata dve glavni krožnici, razdelita sfero na štiri dele, na štiri dvokote, od katerih sta si dva po dva skladna. Točki, v katerih se glavni krožnici sekata, imenujemo vrh dvokota. Kot $\boldsymbol{\alpha}$ v dvokotu je kot med glavnima krožnicama oziroma kot med tangentama na krožnici v vrhu dvokota. Za kot α velja: $0 < \alpha < \pi$.

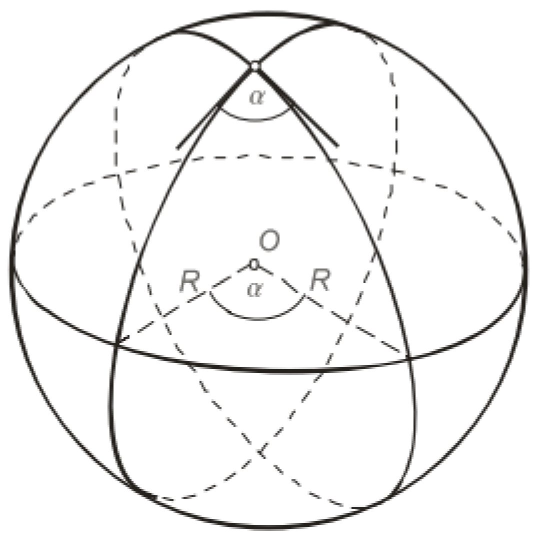
Izrek 1: Ploščina dvokota

Ploščina dvokota je: $P_\alpha = 2R^2\alpha$.

Dokaz 1:

To velja, saj iz razmerja:

$\alpha : 2\pi = P_s : P_\alpha \; ⇨ \; P_\alpha = P_s \times \dfrac{\alpha}{2\pi} \; ⇨ \; 4\pi R^2 \times \dfrac{\alpha}{2\pi} \; ⇨ \; P_\alpha = 2R^2\alpha$ ■



Slika 2: Sferični dvokot (Vir: J. Beban-Brkič, 2003)

Drugi posebni lik je **sferični trikotnik**.

Naj bodo točke $A, B, C \in S(O, R)$, ki ne ležijo na isti glavni krožnici in niso antipodalne točke. Te tri točke povežemo s tremi krajšimi loki glavnih krožnic. Del sfere, ki je omejen s temi loki, je sferični trikotnik z vrhovi A, B, C in oznako $\triangle ABC$. Sferični trikotnik sestavljajo:

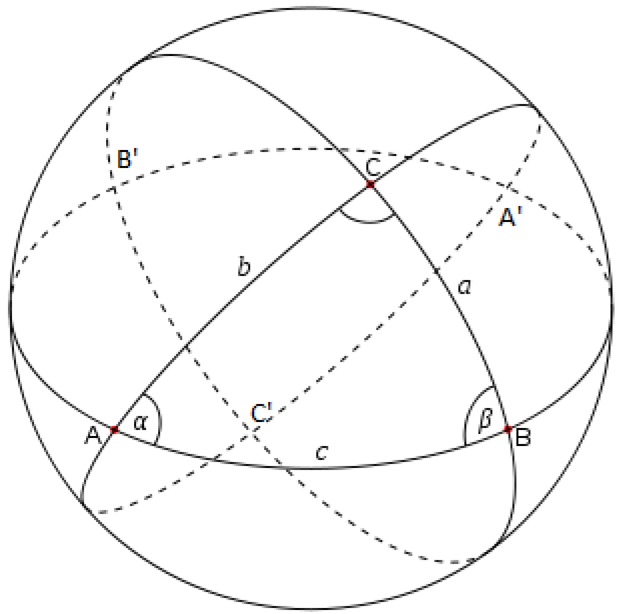
lok $\widehat{AB} = c$

lok $\widehat{BC} = a$

lok $\widehat{CA} = b$

A', B', C'- antipodalne točke točk A, B, C

α, β, γ - notranji koti sferičnega trikotnika



Slika 3 : Sferični trikotnik (Vir: http://www.johndcook.com/blog/spherical_trigonometry/, 2017)

Za sferični trikotnik velja:

1. Dva sferična trikotnika sta skladna, kadar velja $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$; $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$.
2. Diametralno nasprotna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta skladna $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
3. Iz definicije sferičnega trikotnika sledi, da za stranice in kote sferičnega trikotnika na sferi S(O,R) velja: $0 < a, b, c < \pi R$ in $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Izrek 2: Lastnosti (izreki) sferičnega trikotnika:

2.1 $a + b > c$, $|a - b| < c$
2.2 $\alpha + \beta < \gamma + \pi$
2.3 $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$
2.4 $a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$
2.5 Vsota notranjih kotov: $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.
2.6 Vsota stranic: $0 < a + b + c < 2R\pi$.

Navedel bom samo dokaza za izreka [2.5] in [2.6].

Dokaz 2:

Za lažje računanje je dokaz izveden na standardni sferi ($R = 1$).

Za dokaz, da za stranice sferičnega trikotnika velja [2.6], $0 < a + b + c < 2R\pi$, je treba trikotnik podaljšati preko vsake njegove stranice. Tako nastanejo trije novi sferični trikotniki: $\triangle ABC'$, $\triangle CBA'$, $\triangle CAB'$ (Slika 3).

Ob upoštevanju izreka [2.1] sledi:

$$\pi - c + \pi - b > a > 0$$

$$\pi - a + \pi - c > b > 0$$

$$\pi - a + \pi - b > c > 0$$

Seštevek vseh treh neenakosti da:

$$6\pi - 2a - 2b - 2c > a + b + c$$

Na obeh straneh neenakosti prištejemo 2a, 2b in 2c:

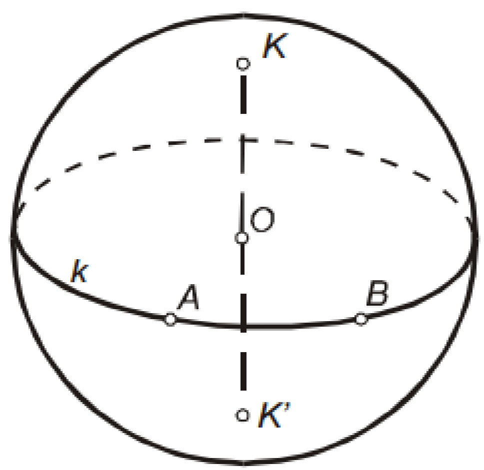
$$6\pi > 3a + 3b + 3c.$$

Delimo s 3 in tako dokažemo trditev:

$$0 < a + b + c < 2\pi. \blacksquare$$

Za dokaz druge neenakosti moramo spoznati in vpeljati novi pojem, to je **polarni sferični trikotnik**. Najprej je potrebno definirati **pol**.

Če imamo lok $\widehat{AB}$ na pozitivno orientirani glavni krožnici k, je točka K na sferi, ki se nahaja na diametru sfere, ki je pravokoten na ravnino glavne krožnice k, pol loka $\widehat{AB}$ ali pol krožnice k. Krožnica k se imenuje **polara** in $k \leftrightarrow K$ je **polariteta** (slika 4).



Slika 4: Točka K je pol loka $\widehat{AB}$ (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

Po prejšni definiciji ima $\triangle ABC$ naslednje elemente:

A' – pol loka $\widehat{BC}$ ali stranici a,

B' – pol loka $\widehat{CA}$ ali stranici b,

C' – pol loka $\widehat{AB}$ ali stranici c.

$\triangle A'B'C'$ je polarni trikotnik. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta medsebojno polarna.

Za elemente $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ polarnega trikotnika veljajo naslednje lastnosti:

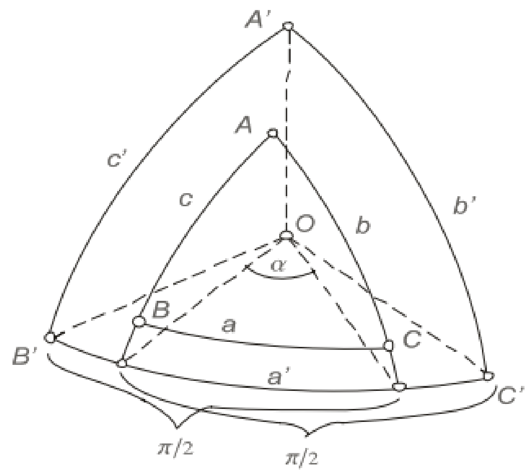
$\alpha + a' = \pi$ $\quad\quad$ $\alpha' + a = \pi$

$\beta + b' = \pi$ $\quad\quad$ $\beta' + b = \pi$

$\gamma + c' = \pi$ $\quad\quad$ $\gamma' + c = \pi$

S pomočjo slike (5) te lastnosti dokaj preprosto dokažemo:

Na primer: $a' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha.$



Slika 5 : Polarni sferični trikotnik (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

Sedaj lahko dokažemo, da za sferični trikotnik velja neenakost $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Najprej zapišemo izrek [2.6] za polarni trikotnik $\triangle A'B'C'$:

$$0 < a' + b' + c' < 2\pi.$$

a', b', c' zamenjamo s pomočjo prej zapisanih lastnosti in dobimo:

$$0 < \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi.$$

Poračunamo in uredimo:

$$0 < 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi.$$

Odštejemo 3π:

$$-3\pi < -(\alpha + \beta + \gamma) < -\pi.$$

Pomnožimo z (-1):

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi. \ \blacksquare$$

Vsota notranjih kotov v sferičnem trikotniku je torej po velikosti vedno med π in 3π. Razlika med vsoto notranjih kotov in π se imenuje **sferični eksces**, z oznako ε. Velja torej: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Iz izreka [2.6] sledi, da je vsota stranic sferičnega trikotnika na standardni sferi manjša od 2π. Razliko med 2π in vsoto stranic imenujemo **sferični defekt**, z oznako d. Torej je: $d = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

S pomočjo sferičnega ekscesa lahko izračunamo površino sferičnega trikotnika.

Izrek 3:

Površina sferičnega trikotnika je:

$$P = R^2\varepsilon.$$

Dokaz 3:

Imamo trikotnik $\triangle ABC$ in diametralno nasproten trikotnik $\triangle A'B'C'$. Podaljšamo stranice trikotnika $\triangle ABC$, tako dobimo tri dvokote. Napišemo enačbo za izračun ploščin teh dvokotov (pomagamo si s sliko 3):

$$P + P(A'BC) = 2R^2\alpha\ ,$$

$$P + P(B'AC) = 2R^2\beta,$$

$$P + P(C'AB) = 2R^2\gamma.$$

Seštejemo, na desni strani izpostavimo $2R^2$ in dobimo:

$$3P + P(A'BC) + P(B'AC) + P(C'AB) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)\ (*).$$

Trikotniki $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle B'AC$ in $\triangle C'AB$ sestavljajo polovico sfere, torej je njihova površina enaka polovici površine sfere, zato sledi:

$$P + P(A'BC) + P(B'AC) + P(C'AB) = 2\pi R^2.$$

To odštejemo od (*) in dobimo:

$$2P = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\pi R^2.$$

Delimo z 2 ter na desni strani izpostavimo R^2, da dobimo:

$$P = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Kar je enako:

$$P = R^2\varepsilon.\ \blacksquare$$

4.1.4 Osnovne zveze med elementi sferičnega trikotnika

Podobno kot v evklidski geometriji tudi v sferični geometriji obstajajo izreki, ki povezujejo stranice sferičnega trikotnika z njegovimi koti. Najprej bomo spoznali in dokazali kosinusni izrek za stranice.

Izrek 4: Kosinusni izrek za notranje kote

1.) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

2.) $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$

3.) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

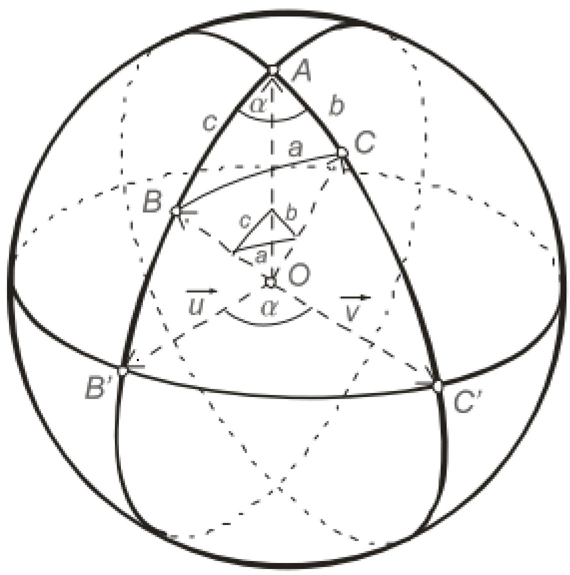
Dokaz 4:

Dokaz bo narejen na standardni sferi ob pomoči znanja o vektorjih (pomagamo si s sliko 6).

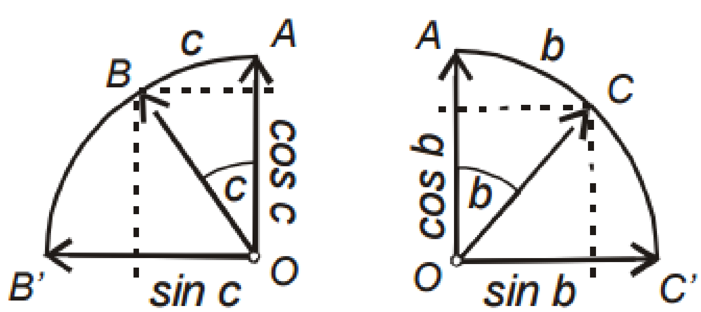
Velja: $S(O,1) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1.$

Naj bodo enotski vektorji: $\vec{u} = \overrightarrow{OB'}, \vec{v} = \overrightarrow{OC'}, \vec{u} \perp \overrightarrow{OA}, \vec{v} \perp \overrightarrow{OA}$.

Vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ skalarno množimo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$.



Slika 6: Skica za pomoč določanja vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$. (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)



Slika 7: Pomožna skica slike 6. (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

Izrazimo $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ s pomočjo $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\overrightarrow{OA}$ (iz slike 7).

$$\overrightarrow{OB} = \cos c\,\overrightarrow{OA} + \sin c\ \vec{u},$$

$$\overrightarrow{OC} = \cos b\,\overrightarrow{OA} + \sin b\ \vec{v}.$$

Vektorja $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OC}$ skalarno množimo:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha.$$

Sledi:

$$\cos\alpha = \left(\cos c\,\overrightarrow{OA} + \sin c\ \vec{u}\right) \cdot \left(\cos b\ \overrightarrow{OA} + \sin b\,\vec{v}\right) =$$

$$= \cos c \cos b\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + \cos c \sin b\ \overrightarrow{OA} \cdot \vec{v} + \sin c \cos b\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{OA} + \sin c \sin b\ \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ker je $\overrightarrow{OA} = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\alpha$ in $\vec{v}\ \perp\ \overrightarrow{OA}$, $\vec{u}\ \perp\ \overrightarrow{OA}$, torej je $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v} = 0$ in $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0$, dobimo:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.\ \blacksquare$$

Za kosinusnim izrekom sledi sinusni izrek.

Izrek 5: Sinusni izrek

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Dokaz 5:

Iz kosinusovega izreka za stranice dobimo, da je:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a\ - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Kvadrirajmo zgornjo enakost ter zamenjajmo $sin^2\alpha$ z $1 - cos^2\alpha$:

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2 a} = \frac{1 - cos^2\alpha}{sin^2 a}.$$

Vstavimo $\cos\alpha$:

$$\frac{1 - (\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c})^2}{sin^2 a} =$$

$$= \frac{1 - \frac{cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + cos^2 b\, cos^2 c}{sin^2 b\, sin^2 c}}{sin^2 a} =$$

$$= \frac{sin^2 a\, sin^2 b - cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - cos^2 b\, cos^2 c}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

Da ulomek lažje poračunamo, namesto $sin^2 b\, sin^2 c$ napišemo $(1 - cos^2 b)(1 - cos^2 c)$. Tako dobimo:

$$(1 - cos^2 b)(1 -\ cos^2 c) = 1 - cos^2 c - cos^2 b + cos^2 b\, cos^2 c.$$

Vstavimo v prejšnjo enačbo, da dobimo:

$$\frac{1 - cos^2 a - cos^2 b -\ cos^2 c\ + 2\cos a \cos b \cos c}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

Postopek ponovimo še za $\frac{\sin \beta}{\sin b}$ in $\frac{\sin \gamma}{\sin c}$:

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}.$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Prvotni izrek kvadrirajmo in zamenjajmo:

$$\frac{sin^2\beta}{sin^2 b} = \frac{1 - cos^2\beta}{sin^2 b}.$$

Vstavimo $\cos \beta$, da dobimo:

$$\frac{1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\right)^2}{sin^2 b} =$$

$$= \frac{1 - \frac{cos^2 b - 2\cos b \cos a \cos c + cos^2 a\, cos^2 c}{sin^2 a\, sin^2 c}}{sin^2 b} =$$

$$= \frac{sin^2 a\, sin^2 c - cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos c - cos^2 a\, cos^2 c}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

Namesto $sin^2 a\, sin^2 c$ napišemo $(1 - cos^2 a)(1 - cos^2 c)$,

$$(1 - cos^2 a)(1 - cos^2 c) = 1 - cos^2 a - cos^2 c + cos^2 a\, cos^2 c .$$

Vstavimo v prejšnjo enačbo, da dobimo:

$$\frac{1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

In enako za $\frac{\sin \gamma}{\sin c}$, kvadrirajmo in zamenjajmo:

$$\frac{1 - cos^2\gamma}{sin^2 c}.$$

Vstavimo $\cos \gamma$, da dobimo:

$$\frac{1 - (\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b})^2}{sin^2 c} =$$

$$= \frac{1 - \frac{cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c + cos^2 a\, cos^2 b}{sin^2 a\, sin^2 b}}{sin^2 c} =$$

$$= \frac{sin^2 a\, sin^2 b - cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c - cos^2 a\, cos^2 b}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

Namesto $sin^2 a\, sin^2 b$ napišemo $(1 - cos^2 a)(1 - cos^2 b)$,

$$(1 - cos^2 a)(1 - cos^2 b) = 1 - cos^2 a - cos^2 b + cos^2 a\, cos^2 b.$$

Vstavimo v prejšnjo enačbo, da dobimo:

$$\frac{1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{sin^2 a\, sin^2 b\, sin^2 c}.$$

Ker so vsi trije končni rezultati enaki, lahko enačimo:

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2 a}=\frac{sin^2\beta}{sin^2 b}=\frac{sin^2\gamma}{sin^2 c}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}.\ \blacksquare$$

Obstaja še kosinusni izrek za notranje kote sferičnega trikotnika.

Izrek 6: Kosinusni izrek za stranice

1.) $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$
2.) $\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos b$
3.) $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$

Dokaz 6:

Naj bo $\triangle A'B'C'$ polarni trikotnik $\triangle ABC$. Po kosinusovem izreku za stranice za $\triangle A'B'C'$ velja:

$$\cos a' = \cos b'\cos c' + \sin b'\sin c'\cos\alpha'.$$

Uporabimo lastnosti polarnega sferičnega trikotnika:

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma)+\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a).$$

Kar je enako:

$$-\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

Pomnožimo z (-1), da dobimo:

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a.\ \blacksquare$$

4.1.5 L'Huillierova formula

Simon A. J. L'Huillier (1750-1840) je bil švicarski matematik. Znan je po številnih delih iz matematične analize in topologije.

Če imamo podane vse tri stranice sferičnega trikotnika (a, b, c), lahko izračunamo **obseg trikotnika** $2s=a+b+c$. S tem lahko izračunamo **sferični eksces** po formuli:

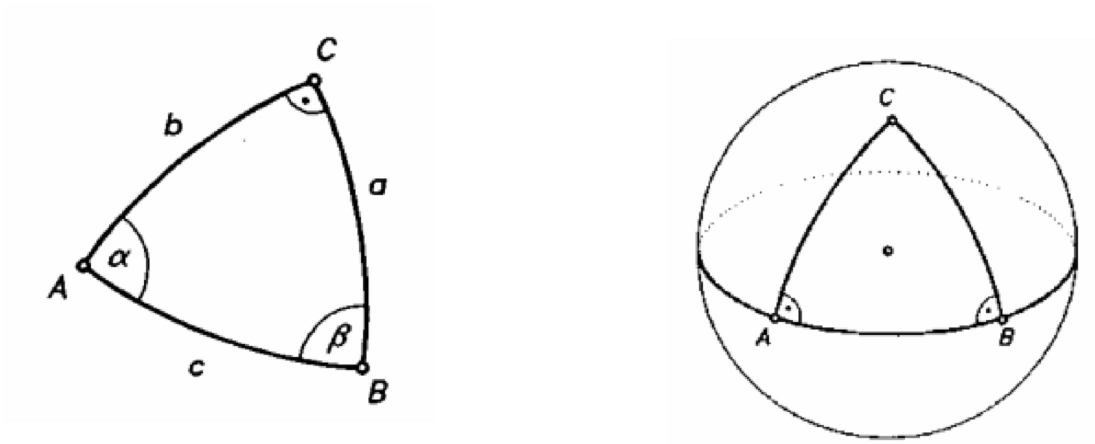
$$\tan\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

4.2 Pravokotni sferični trikotnik

Pravokotni sferični trikotnik je sferični trikotnik, ki ima vsaj en pravi kot. Za razliko od trikotnika na ravnini ima lahko prava kota dva ali celo vse tri.

Oznake so enake kot v evklidski geometriji v ravnini:

a, b – kateti ; c – hipotenuza



Slika 8: Pravokotni sferični trikotnik (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

V pravokotnem sferičnem trikotniku prav tako veljajo posebni izreki.

Izrek 7: Kosinusni izrek za stranice (»sferični Pitagorov izrek«):

Če je $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\pi}{2}$, potem je:

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Izrek 8: Sinusni izrek:

Če je $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\pi}{2}$, potem je:

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c},$$
$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Vse formule pravokotnega sferičnega trikotnika lahko zapišemo s pomočjo ***Napierovega pravila***.

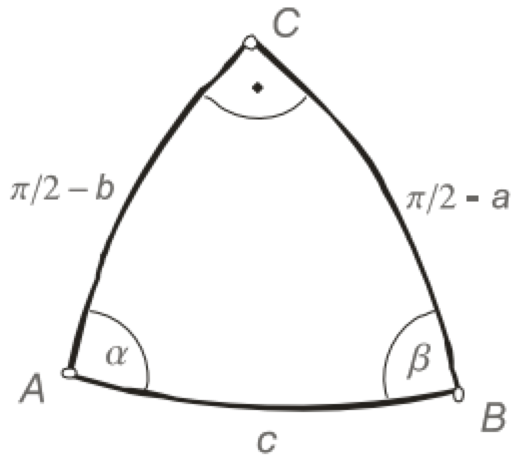
4.2.1 Napierovo pravilo

John Napier (1550 – 1617) je bil škotski matematik. Znan je tudi po vpeljavi naravnih logaritmov, to so logaritmi z osnovo $e = 2{,}71828182\ldots$

Imamo pravokotni sferični trikotnik $\triangle ABC$, ki ga sestavljajo:

α, β – kota

$\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$ – kateti ; c – hipotenuza

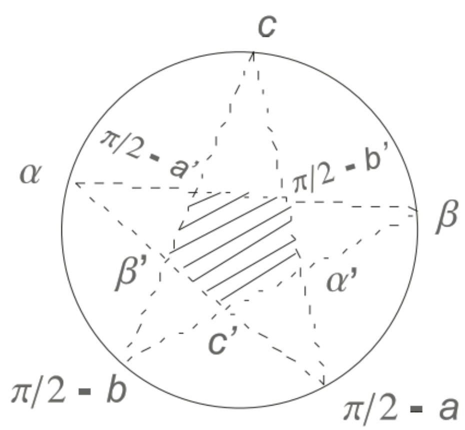


Slika 9: Skica za Napierovo pravilo (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

Vsak element na skici (9) ima 2 sosedna in dva nesosedna elementa. Na primer: elementu β sta elementa $\frac{\pi}{2} - a$ in c sosedna in elementa $\frac{\pi}{2} - b$ in α nesosedna.

Napierovo pravilo:

Kosinus vsakega elementa pravokotnega sferičnega trikotnika je enak produktu kotangensa sosednih elementov, hkrati pa je enak produktu sinusa nesosednih elementov.



Slika 10: Napierovo kolo (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

S pomočjo Napierovega kolesa in uporabo Napierovega pravila dobimo vseh 10 formul za pravokotni sferični trikotnik.

1.) $\cos c = \cot \alpha \cot \beta$

2.) $\cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \Rightarrow \cos a = \cos a \cos b$

3.) $\cos\beta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cot c = \tan a \cot c$

4.) $\cos\beta = \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\alpha \cos b$

5.) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \Rightarrow \sin a = \cot\beta \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cot\beta \tan b$

6.) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a = \sin\alpha \sin c$

7.) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b = \cot\alpha \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot\alpha \tan a$

8.) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b = \sin\beta \sin c$

9.) $\cos\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot c = \tan b \cot c$

10.) $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\beta = \cos a \sin\beta$

Lastnosti pravokotnega sferičnega trikotnika:

$\triangle ABC$, α, β – kota, a, b – kateti, c – hipotenuza

1. $\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{a}{2} \cdot \tan\frac{b}{2}$
2. $\alpha - \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$
3. $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$

4.3 Primerjava med sferično in evklidsko geometrijo

Za lažjo predstavo o podobnosti oziroma razlikah geometrijskih objektov v običajni evklidski geometriji v primerjavi s sferično so zbrani podatki prikazani v tabeli (1).Vsa primerjava je povzeta po: *Dr. Zenon Hanžek: Sferna trigonometrija, 1971*.

Tabela 1: Primerjava med sferično in evklidsko geometrijo

Evklidska geometrija	**Geometrija na sferi**
Skozi dano točko obstaja k dani premici ena in samo ena vzporednica (aksiom o vzporednosti). Dve premici se vedno sekata v natanko eni točki.	Dve glavni krožnici se vedno razpolavljata. Dokaz: Presečišče ravnin obeh glavnih krožnic poteka skozi središče sfere, kjer je polmer sfere del te presečnice. Preko tega se glavne krožnice sekajo v dveh diametralno nasprotnih točkah.
Dve premici, ki sta pravokotni na tretjo premico, sta vzporedni (aksiom).	Dve glavni krožnici, pravokotni na tretjo glavno krožnico, se sekata v središču tretje krožnice.
Premica je natančno določena z dvema različnima točkama (aksiom).	Glavna krožnica je določena z dvema točkama, ki nista diametralno nasprotni. Dokaz: Ravnina glavne krožnice mora potekati skozi dve dani točki in skozi središče sfere. Torej skozi tri točke in je tako določena. Nasprotno, skozi dve diametralno nasprotni točki poteka neskončno mnogo glavnih krožnic.
Vsaka premica je neomejena.	Vsaka glavna krožnica je omejena.
Vsaka točka na ravnini lahko leži na krožnici s poljubnim polmerom.	Polmer krožnice na sferi ne more biti večji od polmera sfere.
Da na premici pridemo od točke A do točke B, se lahko gibamo samo v eno smer.	Da na glavni krožnici pridemo od točke A do točke B, se lahko gibamo v dve nasprotni smeri.
Izmed treh točk na isti premici samo ena leži med drugima dvema.	Izmed treh točk na isti glavni krožnici vsaka leži med drugima dvema.
Skozi katerokoli točko na premici obstaja natanko ena pravokotnica.	Skozi vsako točko, ki ni središče zadane glavne krožnice, poteka skozi samo ena glavna krožnica, ki je pravokotna na zadano glavno krožnico. Nasprotno, vsaka glavna krožnica, ki poteka skozi središče neke zadane glavne krožnice, je pravokotna na to glavno krožnico.
Dve premici delita ravnino na štiri neomejene dele. Hkrati dobimo dva sokota in dva sovršna kota.	Dve glavni krožnici delita površino sfere na štiri dele, na štiri sferične dvokote. Dobimo dva sovršna kota, ki se imenujeta sovršna dvokota in dva sokota, ki se imenujeta sosedna dvokota. Sovršni dvokoti so enaki. Sosednji si delijo eno skupno glavno polkrožnico in sestavljajo polsfero. Točke, ki omejujejo dvokot, se imenujejo vrhovi dvokota. Dvokot ima dva enaka kota in dve stranici, ki sta

	polkrožnici.

Za nekatere pojme in odnose iz evklidske geometrije so narejene ustrezne prilagoditve na geometrijo sfere.

Kadar dve točki A in B nista diametralno nasprotni, potem se povezujeta z dvema različnima lokoma iste glavne krožnice. Zato je razdalja na sferi med dvema točkama definirana kot krajši lok glavne krožnice.

Simetrala loka AB glavne krožnice je geometrijsko mesto točk enake sferične oddaljenosti od točk A in B. Simetrala je glavna krožnica, ki poteka skozi razpolovišče loka AB in je nanj pravokotna.

Simetrala kota dveh glavnih krožnic je geometrijsko mesto točk enake sferične oddaljenosti do glavnih krožnic, ki sestavljata ta kot. To je glavna krožnica, ki poteka skozi vrh kota in hkrati razpolavlja ta kot.

Sferični polmer vsake sekundarne krožnice mora biti manjši od kvadranta glavne krožnice. Kadar je sferična oddaljenost neke točke od sferičnega središča sekundarne krožnice manjša, enaka ali večja od sferičnega radijusa te sekundarne krožnice, lahko določimo, če ta točka leži znotraj, na robu ali izven te krožnice.

Tetiva sekundarne krožnice je lok glavne krožnice, ki povezuje dve točki na robu te krožnice.

5. Praktični del

V nadaljevanju bom predstavil nekaj konkretnih praktičnih primerov uporabe sferične trogonometrije.

5.1 Naloge in primeri praktične uporabe sferične trigonometrije

5.1.1 Primer 1

Sprehajamo se po Zemlji (polmer Zemlje $R = 6370\ km$). Kolikšno pot moramo prehoditi, če želimo opisati središčni kot $\alpha° = 1°, 1'$ ali $1''$.

Izračun:

Lok se izračuna po formuli: $l = R \times \alpha \times \frac{\pi}{180°}$

$$\alpha° = 1° \Rightarrow l = 6370 \times 1° \times \frac{\pi}{180°} \cong 111.1775\ km$$

$$\alpha° = 1' \Rightarrow l = 6370 \times 1' \times \frac{\pi}{180°} = 6370 \times \left(\frac{1}{60}\right)° \times \frac{\pi}{180°} \cong 1.85296\ km$$

$$\alpha° = 1'' \Rightarrow l = 6370 \times 1'' \times \frac{\pi}{180°} = 6370 \times \left(\frac{1}{3600}\right)° \times \frac{\pi}{180°} \cong 0.03088\ km = 30{,}88\ m$$

Odgovor: Da opišemo središčni kot $\alpha° = 1°, 1', 1''$, moramo prehoditi $111.1775\ km$, $1.85296\ km$ in $30.88\ m$.

5.1.2 Primer 2

V Braziliji so posekali del deževnega gozda, tako da je neposekan del ostal v obliki enakostraničnega (sferičnega) trikotnika s stranico dolgo $a = 90\ km$. Kolikšna je površina neposekanega dela?

Izračun:

$$a = b = c = 90\ km$$

$$P = R^2 \times \varepsilon \times \frac{\pi}{180°} = ?$$

$$\varepsilon = ?$$

Sferični eksces bomo izračunali s pomočjo L'Huillierove formule:

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

$$2s = a + b + c = 3a \Rightarrow s = \frac{3a}{2}$$

S formulo za dolžino loka izračunamo a:

$$l = R \times \alpha° \times \frac{\pi}{180°} \Rightarrow \alpha° = \frac{l \times 180°}{R \times \pi} = \frac{90 \times 180°}{6370 \times \pi} = 0{,}809516508°$$

Izračunamo s:

$$s = \frac{3\times\ 0.8095}{2} = \ 1.214274762° \ \Rightarrow \frac{s}{2} = \ 0,607137381°$$

$$\frac{s-a}{2} = \frac{s-b}{2} = \frac{s-c}{2} = 0.202379127°$$

To vstavimo v prejšno formulo, da dobimo:

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{4{,}6699827^{-10}} = 0{,}00002161 \ \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4} = 0{,}001238169° \ \Rightarrow \varepsilon = 0{,}004952627°$$

Sedaj lahko izračunamo površino:

$$P = \ R^2 \times \varepsilon° \times \frac{\pi}{180°} = \ 6370^2 \times \ 0{,}004952627° \times \frac{\pi}{180°} = 3507{,}452944\ km^2$$

Odgovor: Površina neposekanega dela je $3507{,}452944\ km^2$.

Za primerjavo lahko izračunamo površino istega trikotnika na ravnini (P_{RT}):

$$P_{RT} = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4} = 3507{,}402885\ km^2$$

$$P - P_{RT} = 0{,}056359\ km^2 = 56\ 359\ m^2$$

5.1.3 Primer 3

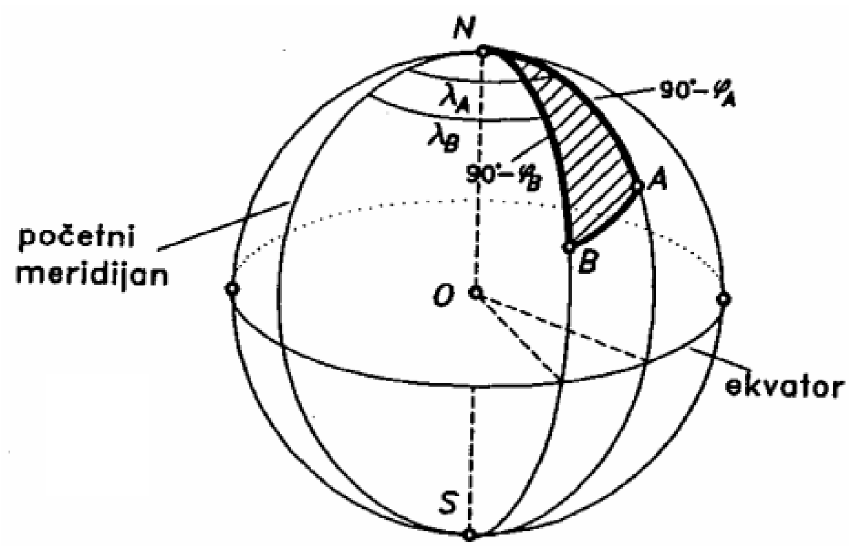
Potniško letalo poleti iz Ptuja s ciljem v Tokyu. Kolikšna je razdalja in kako dolgo bi letalo potrebovalo za polet, če poznamo geografsko dolžino (longitudo) λ in geografsko širino (latitudo) φ obeh krajev in leti s povprečno hitrostjo 253.47168 $\frac{m}{s}$ na višini 10.0584 km (če vmes ne pristane zaradi goriva)?

Izračun:

Tokyo – točka A ($\varphi_A = 35°41'22'', \lambda_A = \ \ 139°41'30''$)

Ptuj – točka B ($\varphi_B = 46°\ 25'12'', \lambda_B = \ 15°\ 52'12''$)

Točka N – severni pol (pol ekvatorske krožnice)



Slika 11: Skica k nalogi 3 (ni v merilu) (Vir: J. Beban-Brkić, 2003)

Preko $\triangle ABN$ lahko s kosinusnim izrekom izračunamo razdaljo od A do B.

$$\cos c = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B\right)\cos(\lambda_A - \lambda_B)$$

$$\cos c = \sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B)$$

$$c = \cos^{-1}(\sin 0{,}622898313 \sin 0{,}810181838 + \\ + \cos 0{,}622898313 \cos 0{,}810181838 \cos 2{,}161095769)$$

$$c = 1.459595528 \Rightarrow l = (R_z + r) \times c = 6380.0584 \times 1.459595528$$

$$l = 9312.304709\ km.$$

$$v = \frac{l}{t} \Rightarrow t = \frac{l}{v} = \frac{9312304.709\ m}{253.47168\ \frac{m}{s}} = 36739.03416\ s = 10.21\ h$$

Odgovor: Letalo bi razdaljo $9312.3\ km$ preletelo v $10.21\ h$.

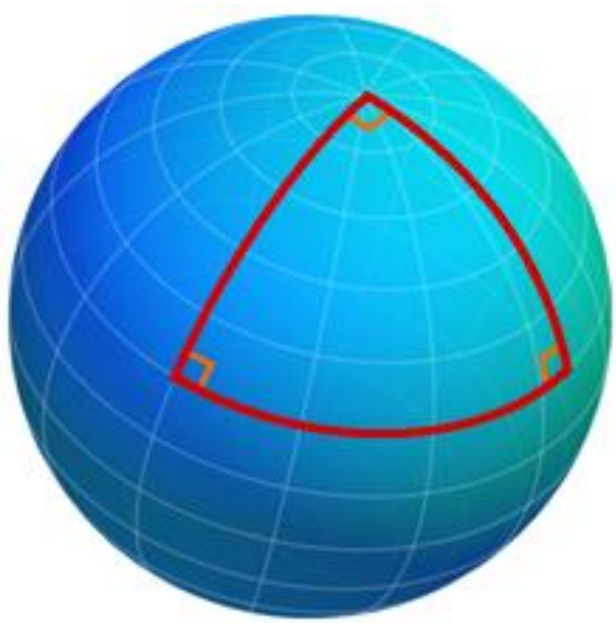
6. Rezultati

Cilj naloge je bil raziskati, ali je mogoče, da ima trikotnik vse tri notranje kote prave kote. Ugotovil sem, da to v evklidski geometriji ni mogoče, obstaja pa geometrija na sferi, kjer je to mogoče in kjer ne veljajo enaki aksiomi kot na ravnini.

Razdalja med dvema točkama na sferi je krožni lok in ne ravna daljica, kot je v ravninski. Simetrala loka je glavna krožnica, ki poteka skozi razpolovišče loka in je nanj pravokotna. Simetrala kota je glavna krožnica, ki poteka skozi vrh kota in ga hkrati razpolavlja.

Na sferi obstaja tudi sferični dvokot, ki nastane, kadar se sekata dve glavni krožnici. Ko se sekajo tri glavne krožnice, nastane sferični trikotnik s posebnimi izreki. Eden izmed njih pravi, da je vsota stranic pri tem trikotniku med 0 in $2R\pi$. Drugi pa, da je vsota notranjih kotov vedno med π in 3π. Iz teh dveh dobimo tudi novi količini, to sta sferični eksces in sferični defekt. Vsak sferični trikotnik ima tudi svoj polarni sferični trikotnik, prav tako ima svoj diametralno nasproten trikotnik. Posebnost sferičnega trikotnika je tudi pri njegovih povezavah med njegovimi stranicami in koti. To dokazujeta dva kosinusna izreka in sinusni izrek. Obstaja tudi L'Huillierova formula, s katero lahko izračunamo sferični eksces trikotnika. Pri pravokotnem sferičnem trikotniku prav tako veljajo posebni izreki, kot je sferični Pitagorov izrek. Z uporabo Napierovega pravila pa dobimo vseh 10 formul za razreševanje pravokotnega sferičnega trikotnika.

Pri nalogah in primerih praktične uporabe lahko z uporabo izrekov in formul dokaj preprosto rešimo primere.



Slika 12: Pravokotni sferični trikotnik, ki ima vse tri kote prave kote (Vir: http://world.mathigon.org/Dimensions_and_Distortions, 2017)

7. Zaključek

Z raziskovanjem sem spoznal novo vejo geometrije, sferično geometrijo, in si tako razširil znanje tako geometrije kot matematike nasploh. Glede na to, da živimo na okroglem planetu, se mi zdi njena uporaba koristna, kot je videti v primeru (2), kjer je kar precejšna razlika, če uporabljamo sferično geometrijo ali ravninsko geometrijo. Prav tako v primeru (3), da izračunamo najkrajšo možno razdaljo in tako privarčujemo gorivo in čas.

8. Viri in literatura

1. J. Beban-Brkič, Matematika 1, Zagreb, 2003. Dostop: http://www2.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/13.pdf (25. 2. 2017)
2. Glen Van Brummelen, Heavenly Matematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry, Princeton University, 2012.
3. Ružica Korać, Geometrija Kugle i Sfere, diplomsko delo, Zagreb, 2015. Dostop: http://digre.pmf.unizg.hr/4290/1/KoracGeometrija%20kugle%20i%20sfere.pdf (25. 2. 2017)
4. Marko Uršič, Neevklidske geometrije, Ljubljana, 2010. Dostop: http://www2.arnes.si/~mursic3/Neevklidske_geometrije_FN-2013.pdf (25. 2. 2017)
5. J. J. O'Connor, E. F. Robertson, Non-Euclidean geometry, University of St Andrews, 1996. Dostop: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html (25. 2. 2017)
6. Zenon Hanžek, Sferna trigonometrija, Zagreb, 1971.